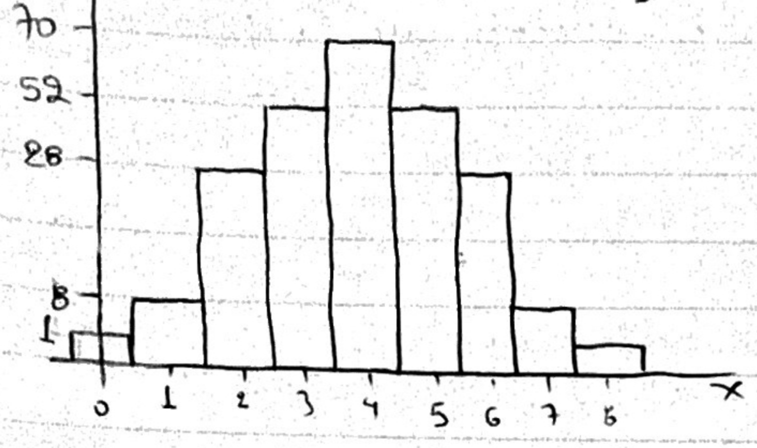
(13) 12/3

$X \sim B(n=8, p=\frac{1}{2})$.

$P_x(x) = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{\binom{8}{x}}{256}$, $x = 0, \dots, 8$




<u>Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)</u>

1) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτ. κ ισόνομες τ.μ., η κάθε μια με πεπερασμένη μέση τιμή μ κ διακύμανση $\sigma^2$. Τότε για "μεγάλο" n η τ.μ. $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N(0,1)$ ή διαφορετικά $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)$

2) Έστω $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό $(\mu, \sigma^2)$.
Αν το n είναι "μεγάλο" η δειγματική μέση τιμή $\bar{X} \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
ή διαφορετικά $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N(0,1)$

<u>Παρ 3.2</u>

$1\,\mu sec = 10^{-6}\,sec$

$P(X=k) = \frac{(0.16)^k e^{-0.16}}{k!} = P(\lambda = 0.16)$

$1\,sec = 10^6\,\mu sec$

$P(159.000 \leq X \leq 161.000) = P(A)$

<u>Λύση</u>

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{10^6}$ ο αριθμός ηλεκτρονίων που θα φτάσουν στο $1^o, 2^o, \dots, 10^6$ μsec. $X_i \sim P(\lambda = 0.16) \Rightarrow \mu = E(X_i) = 0.16 = Var(X_i) = \sigma^2$, $10^6 = n$

$X = X_1 + \dots + X_{10^6} \Rightarrow X \sim N(n\cdot\mu = 10^6 \cdot 0{,}16 = 160.000, \; n\cdot\sigma^2 = 160.000)$

$P(A) = P(158.999{,}5 \leq X \leq 161.000{,}5 \mid X \overset{\text{προσεγγ.}}{\sim} N(160.000, 160.000)) =$

$= P\left(\frac{158.995{,}5 - 160.000}{\sqrt{160.000}} \leq \frac{X - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{161.000{,}5 - 160.000}{\sqrt{160.000}}\right) =$

$= P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = 0{,}9876$

<u>Κανονική Προσέγγιση της Διωνυμικής Κατανομής</u>

$n$ δοκιμές Bernoulli $\quad x_i = 1$ αν επιτυχία όπου $p$

αν αποτυχία όπου $q = 1-p$

$X = X_1 + \ldots + X_n$ : ο αριθμός επιτυχιών στις $n$ δοκιμές

$X \sim B(n,p) \implies E(X) = n \cdot p, \; Var(X) = n \cdot p \cdot q$

$\mu = E(x_i) = p$

$\sigma^2 = Var(x_i) = E(x_i^2) - [E(x_i)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$

$E(x_i^2) = p$

$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim N(n \cdot p, \; n \cdot p \cdot q)$

$P(3 \le X \le 6 \mid X \sim B(8, \frac{1}{2})) = [P(X=3) + \ldots + P(X=6) = \frac{52}{256} + \ldots + \frac{28}{256} = 0{,}82$ (ακριβές)$]$

$\cong P(2{,}5 \le X \le 6{,}5 \mid X \overset{\text{προσεγ.}}{\sim} N(n \cdot p = 4, \; npq = 2))$

$= P\left(\frac{2{,}5-4}{\sqrt{2}} \le \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \le \frac{6{,}5-4}{\sqrt{2}} \,\middle|\, Z \sim N(0,1)\right)$

$= P(-1{,}06 \le Z \le 1{,}77) = P(0 \le Z \le 1{,}77) + P(0 \le Z \le 1{,}06) =$

$= 0{,}4616 \quad + \quad 0{,}3554 = 0{,}817$

<u>Άσκ (3.3)</u>

$2K, \; 2A, \; 1M \; \| \; n = 100$

$X$ = αριθμός άσπρων σπόρων

$X \sim B(n = 100, p = \frac{2}{2+2+1} = \frac{2}{5} = 0{,}4)$

$P(X \le 50) = \sum_{x=0}^{50} \binom{100}{x} (0{,}4)^x (0{,}6)^{100-x}$ (ακριβές)

$\cong P(X \le 50{,}5 \mid X \overset{\text{προσεγ.}}{\sim} N(n \cdot p = 40, \; n \cdot p \cdot q = 24))$

$= P\left((Z =) \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \le \frac{50{,}5 - 40}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \le 2{,}14) = 0{,}9842$

## Άσκ. 3.2

$X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$

(i) $X_i - \bar{X} \sim ;$ (ii) $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$ (iii) $E(S'^2) = ;$ (iv) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

Ξέρουμε

$E(S^2) = \sigma^2$

$$\left.\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum(\quad)^2 \\ S'^2 &= \frac{1}{n}\sum(\quad)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S' = \frac{n-1}{n} S^2 \xrightarrow{(iii)} E(S'^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

(i) $X_i - \bar{X} \sim N(\quad,\quad)$

$$X_i - \bar{X} = X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \left(X_i - \frac{1}{n}X_i\right) - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} X_j = \frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} X_j$$

$$E(X_i - \bar{X}) = E\left[\frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} X_j\right] = \frac{n-1}{n}\cdot\mu - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\mu = \frac{n-1}{n}\mu - \frac{1}{n}(n-1)\mu = 0$$

$$Var(X_i - \bar{X}) = Var\left[\qquad\qquad\qquad\right] = \dots = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

άρα $X_i - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$

## Άσκ. 3.3

$X_1, X_2 \sim N(0,1)$

(i) $\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim ;$ (ii) $\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_2-X_1)^2} \sim ;$ (iii) $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{(X_2-X_1)^2}} \sim ;$ (iv) $\frac{X_2^2}{X_1^2} \sim ;$

(i) $X_2 - X_1 \sim N(0-0, 1+1)$ ή $X_2 - X_1 \sim N(0, 2)$ ή $\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

(ii) $X_2 + X_1 \sim N(0, 2)$ ή $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ ή $\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2_1$

και $\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2_1$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(X_1+X_2)^2}{2}/1}{\frac{(X_2-X_1)^2}{2}/1} \sim F_{1,1}$$

Άρα τώρα αρκεί ν.δ.ο. οι $(X_1+X_2)^2$ κ $(X_2-X_1)^2$ ανεξάρτητες αλλά αυτό δεν μπορούμε ακόμα να το δείξουμε λόγω ελλειπών γνώσεων

(iii) $$\left.\begin{aligned} &\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \\ &\frac{(X_2-X_1)^2}{2} \sim \chi^2_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(X_2-X_1)^2}{2}/1}} \sim t_1$$

(iv) $$\left.\begin{aligned} &X_1^2 \sim \chi^2_1 \\ &X_2^2 \sim \chi^2_1 \end{aligned}\right\} \quad \frac{X_2^2/1}{X_1^2/1} \sim F_{1,1}$$